Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №7 города Ивделя

Направление: математика

**НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ**

**КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Вид работы: научно - исследовательская

Исполнитель: Концевич Максим,

обучающийся 8 класса

МАОУ СОШ №7 г.Ивделя

Руководитель: Ерхова Наталья

Александровна,

учитель математики,

МАОУ СОШ №7 г.Ивделя

СОДЕРЖАНИЕ

1. [**ВВЕДЕНИЕ** 3](#_Toc417291358)
2. **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ …………………………………………………5**

**2.1. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ ……………………………………….5**

[**2.2.ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КВАДРАТНЫХ** 6](#_Toc417291359)

[**УРАВНЕНИЙ** 6](#_Toc417291360)

[**2.3. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ** 11](#_Toc417291361)

[1. Способы, которые изучают в школе. 11](#_Toc417291362)

[2. Особые случаи в решении квадратных уравнений. 13](#_Toc417291363)

[3. Набор упражнений для отработки решения квадратных 15](#_Toc417291365)

[уравнений. 15](#_Toc417291366)

**3.** [**ЗАКЛЮЧЕНИЕ** 18](#_Toc417291367)

**4.**[**СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ** 19](#_Toc417291368)

1. **ВВЕДЕНИЕ**

В 8 классе мы изучили квадратные уравнения. Умение решать их необходимо, поскольку решение квадратного уравнения – это базовая тема школьного курса математики. В учебниках по алгебре рассматриваются различные способы решения квадратных уравнений.

При изучении в школе квадратных уравнений, я очень заинтересовался этой темой. Мне стало интересно узнать, какие же еще бывают способы решения квадратных уравнений, в том числе, и устные приемы. Потребность в быстром решении квадратных уравнений обусловлена, например, тем, что время отводимое на сдачу ГИА, ограничено. И меня заинтересовало, а можно ли устно решать квадратные уравнения.

Проблема: «Какие существуют рациональные способы решения квадратных уравнений?»

Тема: Квадратные уравнения за страницами учебника

Цель работы:

* Знакомство с новыми методами решения квадратных уравнений;
* Углубление знаний по теме «Квадратные уравнения»;
* Развитие математических, интеллектуальных способностей, навыков исследовательской работы.

Задачи:

1. Проанализировать учебник алгебры для выявления в нем способов

решения квадратных уравнений.

1. Узнать можно ли решать любое квадратное уравнение со всеми способами, выявить особенности и недостатки этих способов решения квадратных уравнений.
2. Изучить дополнительный исторический материал.
3. Рассмотреть рациональные способы решения квадратных уравнений.
4. Провести мастер-класс для учащихся 8-11 классов.

Для выявления актуальности моей темы я провел исследование. Учащимся 8 – 9 классов было предложено решение полного квадратного уравнения любым известным им способом. В исследовании приняли участие 25 учеников. Результаты исследования выявили следующее:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п/п | Способы решения квадратных уравнений | 8 класс  Приняло участие 10 человек | | 9 класс  Приняло участие 15 человек | |
| Количесво  выполнения | № выполнения | Количесво  выполнения | № выполнения |
| 1 | Метод выделения квадрата двучлена | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 2 | Решение уравнения по формулам дискриминанта и корней квадратного уравнения | 8 | 32 | 10 | 40 |
| 3 | Решение уравнения по формуле с четным коэффициентом | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | Метод разложения левой части уравнения на множители способом группировки | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | Решение уравнения, используя теорему Виета | 3 | 12 | 4 | 16 |
| 6 | Решение уравнения графическим способом | 3 | 12 | 2 | 8 |

Объект исследования:квадратные уравнения.

Предмет исследования: способы решения квадратных уравнений.

Гипотеза:существуют ли другие способы решения квадратного уравнения?

Практическая значимость: квадратные уравнения – это фундамент, на котором построен курс алгебры. К решению квадратных уравнений сводятся решения дробно-рациональных уравнений и текстовых задач, находят широкое применение при решении тригонометрических, логарифмических, иррациональных уравнений. Начинают изучать решение квадратных уравнений в 8 классе и решают их до окончания вуза.

Методы исследования: анализ литературы, социологический опрос, наблюдение, сравнение и обобщение результатов.

Данная работа является попыткой обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме. В неё вошли как известные нам из школьного курса алгебры способы решения квадратных уравнений, так и дополнительный материал.

1. **Основная часть**

**2.1. Квадратные уравнения**

Квадратным уравнением называют уравнение вида ах²+bх+с=0, где коэффициенты а, b, с - любые действительные числа, причём, а≠0. Коэффициенты а, b, с, различают по названиям: а - первый или старший коэффициент; b - второй или коэффициент при х; с - свободный член, свободен от переменной х.

Квадратное уравнение также называют уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени. Квадратное уравнение называют приведенным, если старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют неприведенным, если старший коэффициент отличен от 1. х²+рх+q=0 - стандартный вид приведенного квадратного уравнения

Кроме приведенных и неприведенных квадратных уравнений различают также полные и неполные уравнения.

Полное квадратное уравнение - это квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и с отличны от нуля.

Неполное квадратное уравнение - это уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b и с равен нулю.

Обратите внимание: об ах² речи нет, этот член всегда присутствует в квадратном уравнении.

Корнем квадратного уравнения ах²+вх+с=0 называют всякое значение переменной х, при котором квадратный трехчлен ах²+bх+с обращается в нуль; такое значение переменной х называют также корнем квадратного трехчлена.

Можно сказать и так: корень квадратного уравнения ах²+bх+с=0 - это такое значение х, подстановка которого в уравнение обращает уравнение в верное числовое равенство 0=0.

Решить квадратное уравнение - это значит найти все его корни или установить, что их нет.

**2.2. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КВАДРАТНЫХ** **УРАВНЕНИЙ**

Сухие строки уравнений -

В них сила разума влилась.

В них объяснение явлений,

Вещей разгаданная связь.

Л.М.Фридман

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне.

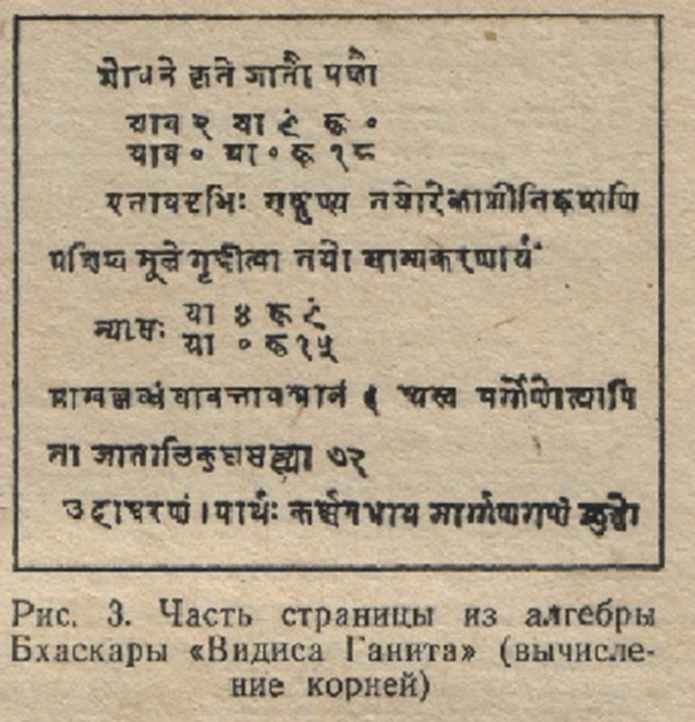
Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

*Квадратные уравнения в Индии*

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме. В уравнении коэффициенты, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.



В Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму. Решение Бхаскары свидетельствует о том, что автор знал о двузначности корней квадратных уравнений.

*Квадратные уравнения у Аль-Хорезми*

В алгебраическом трактате Аль-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений.

Для Аль-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида Аль-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений Аль-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства. Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения. 

*Квадратные уравнения в Европе XII-XVII в.*

Формы решения квадратных уравнений по образцу Аль-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202г. итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Эта книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из этой книги переходили почти во все европейские учебники XIV-XVII вв. Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду x2 + bх = с при всевозможных комбинациях знаков и коэффициентов b, c, было сформулировано в Европе в 1544 г. М.Штифелем.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX--VI вв. до н. э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда время от времени возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими, с нашей современной точки зрения, составления уравнения или системы уравнений. Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться начатки алгебраических представлений. Например, вавилонские вычислители умели решать задачи, сводящиеся с точки зрения современной классификации к уравнениям второй степени. Был создан метод решения текстовых задач, послуживший в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения.

Это изучение осуществлялось уже в другую эпоху сначала арабскими математиками (VI--Х вв. н. э.), выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака. А затем европейскими математиками Возрождения, в итоге длительного поиска создавшими язык современной алгебры, использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т. д. На рубеже XVI--XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики.

* 1. **СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

1. Способы, которые изучают в школе

Решить квадратное уравнение – это значит найти все его корни либо же установить тот факт, что квадратное уравнение корней не имеет. Корнем квадратного уравнения ах2+bx+c=0 называют любое значение переменной х, такое, что квадратный трехчлен aх2+bx+c обращается в нуль.

1. Рассмотрим один из способов, изучаемый в школе, «*метод выделения полного квадрата*» с его помощью можно решить любое уравнения.

Решим уравнение х2 + 6х - 7 = 0. Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение х2 + 6х в следующем виде:

х2 + 6х = х2+ 2• х • 3.

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа х, а второе - удвоенное произведение х на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32, так как

Х2 + 2• х • 3 + 32 = (х + 3)2.

Преобразуем теперь левую часть уравнения

х2 + 6х - 7 = 0,

прибавляя к ней и вычитая 32 . Имеем:

х2 + 6х - 7 = х2 + 2• х • 3 + 32 – 32 - 7 = (х + 3)2 - 9 - 7 = (х + 3)2 - 16.

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

(х + 3)2 - 16 =0, (х + 3)2 = 16.

Следовательно, х + 3 = 4, х1 = 1, или х + 3 = - 4, х2= - 7.

Способ универсальный, но очень громоздкий. На его основе были выведены формулы, о которых рассказывается ниже.

1. Рассмотрим самый универсальный и более известный способ – по *формулам или через дискриминант*.

Находим коэффициенты **а, b, с** квадратного уравнения, и по формуле считаем дискриминант:

D = b² - 4ac

О корнях квадратного уравнения можно судить по знаку дискриминанта (D):

D>0 - уравнение имеет 2 различных вещественных корня

D=0 - уравнение имеет 2 совпадающих вещественных корня

D<0 - уравнение имеет 2 мнимых корня (для непродвинутых пользователей - корней не имеет)

C:\Users\1\Desktop\API Gravity_clip_image002_0001.gif

Данный алгоритм универсален и подходит для решения любых квадратных уравнений. Полных и не полных, приведенных и неприведенных. Нужно только выучить формулы.

Рассмотрим второй случай, которые используется для решений приведённого квадратного уравнения.

1. *Теорема Виета*

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида:

x2 + px + g = 0 т.е. квадратное уравнение с единичным коэффициентом при старшем члене.

В этом случае целесообразно применять теорему Виета, которая позволяет получить относительно корней уравнения следующую систему уравнений:

C:\Users\1\Desktop\API Gravity_clip_image002_0007.gif

Способ унивесальный, так с его помощью находятся корни любого уравнения или доказывается, что их нет. Легко находятся только целые корни.

2.Особые случаи в решении квадратных уравнений

*Теорема 1*.Если сумма коэффициентов а + b + c= 0, то один его корень равен 1, а другой .

Доказательство:

Если a+b+c=0, то b= - (a + c). ТогдаD = (-(a+c))²-4ac = (a+c)² - 4ac =

= (a-c) ². Следовательно,

. Очевидно, что х1,2= . Таким образом,

х1 = =1, х2 = =.

Утверждение доказано.

*Теорема 2.* Пусть дано квадратное уравнение ах2 + bx + c = 0. Если сумма его коэффициентов а – b + с = 0, то один его корень равен -1, а другой равен

– с/а.

Доказательство:

Если а - b+с = 0, то b = а + с. Тогда D = (a+c) ²- 4ac = а2 - 2ас + с2 = (a- c) ².

Следовательно,

Очевидно, что х1,2 . Таким образом, х1= -1,

х2= -.

Утверждение доказано.

Способ переброски.

*Теорема 3.* Пусть дано квадратное уравнение ах2+ bx + c = 0 и приведённое квадратное уравнение у2 + bу + ас = 0. Корни первого уравнения равны корням второго уравнения, уменьшенным в **а** раз.

Доказательство:

Нетрудно проверить, что в обоих уравнениях D = b² - 4ac. При этом корни первого уравнения х1,2, а корни второго уравнения у1,2=.

Видно, что при делении у1,2 на **а** получаются корни х1,2.

Утверждение доказано.

## При этом способе коэффициент **а** умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

1. **Набор упражнений для отработки решения квадратных**

**уравнений**.

*Через дискриминант:*

-7х + 5х2 + 1 =0

2х2 + 5х - 7 = 0

–х2 = 5х

– 14x2 -11х +18 =0

х2- 4х- 8=0

4х2+5х-14=0

х2 + 9х+14=0

2х2 -14х-36=0

х2 +4х +5 = 0

2х2 + 5х – 3 = 0

х2 +15х – 3 =0

6х2 + 3х + 7 = 0

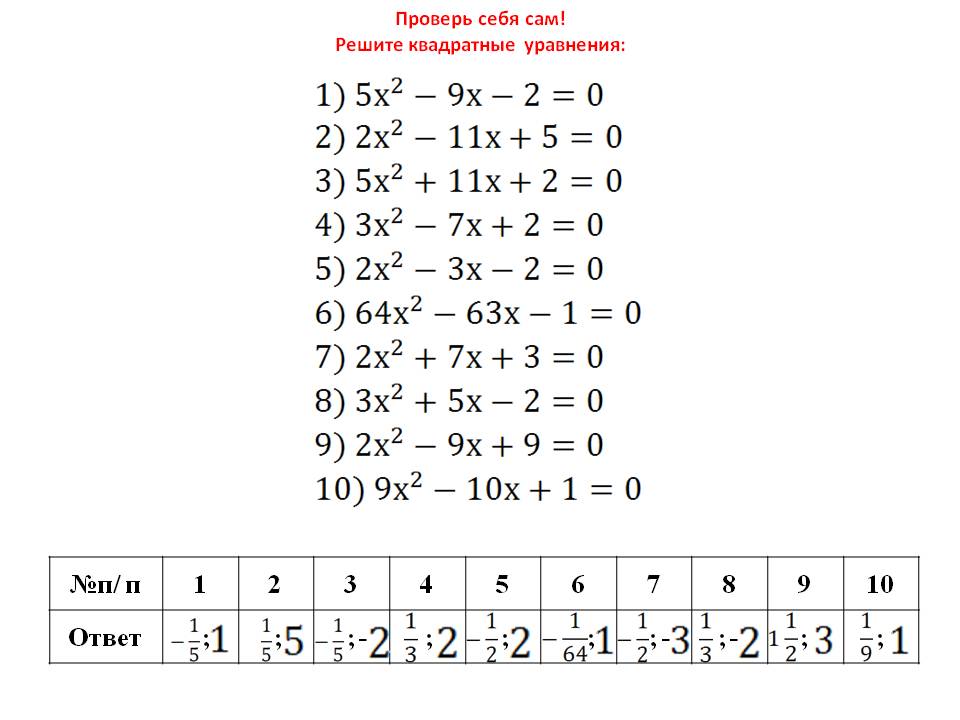
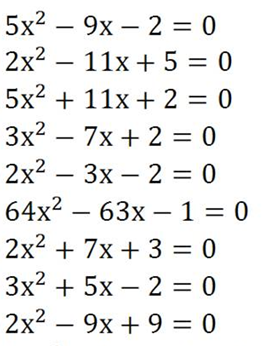
8х2 -4х – 9 = 0

7х2 + 5х – 3 = 0

х2 + 4х - 8 = 0

3х2 + 15х - 10= 0;

5х2 – 13х – 6 = 0

*Теорема Виета:*

х2+2х-35=0

х2-22х+121=0

у2-7у+10=0

х2-х-42=0

х2-7х+12=0

х2+7х-18=0

х2-х-72=0

х2-11х+10=0

х2+5х+6=0

х2+12х+20=0

х2+х-6=0

х2-6х-8=0

х2-10х+21=0

х2-5х+4=0

2х2 – 4х – 11 = 0

х2 + 11х + 30 = 0

х2– х – 30 = 0

х2 - 5х + 6 = 0

х2 – 3х – 4 = 0

х2 + 5х + 4 = 0

х2– 2,6х – 1,2 = 0

x2 + 17x - 38 = 0

x2-16x + 4 = 0

x2 + 2x - 3 = 0

x2 + 12x + 32 = 0

x2 - 2x - 3 = 0

- x2 + 12x + 32 = 0

x2 + 17x - 18 = 0

*Если сумма коэффициентов а+ b +c= 0, то один его корень равен 1, а другой :*

6х2 – 17х + 11=0

9х2 – 13х + 4=0

9х4 – 5х2 – 4=0

14х2 + 17х – 31=0

11х2 – 17х + 6=0

2()2 – 7() + 5=0

- 27х2 + 35 – 8=0

5()2 – 2() – 3=0

х2 – 6х + 5=0

2х2 + 9х – 11=0

5х2 – 8х + 3=0

х2 + 3х – 4 =0

4271x2– 4272x + 1 = 0

3х4 – 8х2 + 5=0

27х6 – 35х3 + 8=0

7х2 + 4х – 11=0

4(n2 – 3n)2 – 13(n2 – 3n)2 + 9=0

*Если сумма коэффициентов а – b+ с=0, то один его корень равен -1, а другой равен –*

х2+ 7х + 6 =0

х2 – 39х – 40=0

2х2 – 15х – 17=0

2(5х + 1)4 + 5(5х + 1)2 + 3=0

6х2 + 17х + 11=0

2000х4 + 2013х2 + 13=0

30х2 + 39х + 9=0

4(n2 + 3n)2 + 13(n2 + 3n) + 9=0

2х2 – 5,8х – 7,8=0

(2 + 2 () + 1=0

100х2 – 97х – 197=0

4()2 + 5() + 1=0

*Способ «Переброски»:*

5х2 – 16х + 3=0

10х2 – 11х + 3=0

3х2 + 11х + 6=0

2х2 + х – 10=0

2х2 – 9х + 9=0

4x2– 1 7x – 15 = 0

6x2– 7x – 3 = 0

10х2 – 11х + 3 = 0

3х2 + 11х + 6 = 0

4х4 + 12х2 + 5=0

6х2 + 5х – 6 = 0

135х6 + 39х3 + 2=0

2х2 + х – 10 = 0

4х4 – 21х2 + 17=0

5х2 – 11х + 6 = 0

4(х2 – х)2 – 9(х2 – х) + 2=0

4х2 + 12х + 5 = 0

3(2х2 – х + 1)2 – 24(2х2 – х + 1) + +21=0

1. **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе я изложил все известные виды и решения квадратных уравнений из школьного курса.

Основным в решении квадратных уравнений является правильно выбрать рациональный способ решения и применить алгоритм решения.

Проанализировав учебник алгебры за 8 класс под редакцией Алимова, Колягина и других, выделил 3 способа решения квадратных уравнений, которые изучаются в школе: метод выделения полного квадрата, по формулам и с помощью теоремы Виета. Заинтересовался, а есть другие способы решения уравнений? Изучив дополнительную литературу и Интернет- ресурсы, выделил для себя 3 особых теоремы, о которых и рассказал в своей работе. Это два свойства коэффициентов и способ переброски, которые позволяют решать устно уравнения, дискриминант которых полный квадрат.

Подобрал примеры квадратных уравнений для отработки новых знаний. И захотел поделиться и рассказать о новых способах другим ученикам, которые изучали эту тему. Провел мастер-класс для восьмого и девятого классов, на дом составил карточки для отработки новых навыков. Часть учеников решили их на «отлично». Им очень понравилось, и они были удивлены, что так быстро можно решать квадратные уравнения.

Так же мне стало интересно узнать, откуда вообще взялись квадратные уравнения? И выяснил, что необходимость решать уравнения в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне.

Ещё раз убедился, что наука математика – очень интересная. И свою работу я хочу закончить словами Петера Ропса: «Я люблю математику не только потому, что она находит применение в технике, но и потому, что она красива…»

**СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Алгебра 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений.

Авторы: Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и другие.

М.: Просвещение, 2009 г.

1. Алгебра 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений.

М.: Просвещение, 2018

Авторы: С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин

1. <http://www.egesdam.ru/page221.html>
2. <http://xreferat.ru/54/1828-1-10-sposobov-resheniya-kvadratnyh-uravneniiy.html>
3. <http://dok.opredelim.com/docs/index-46383.html>