Всероссийская дистанционная научно-практическая конференция школьников и студентов «МОЛОДОЙ УЧЁНЫЙ»

**Исследовательская работа**

**Тема**: «Применение метода математической индукции в курсе школьной программы по математике»

**Секция**: математика

**Автор:**

Романов Егор Вячеславович,

ученик 9б класса

 МБОУ СОШ №34 г. Ижевска

 Удмуртской Республики

**Руководитель:**

Лизунова Ирина Юрьевна,

учитель географии и экономики

МБОУ СОШ №34 г. Ижевска

Удмуртской Республики

+79127530094

Оглавление

[Введение. 3](#_Toc506275246)

[Глава 1. Математическая индукция 5](#_Toc506275247)

[1.1 История создания 5](#_Toc506275248)

[1.2 Метод математической индукции 7](#_Toc506275249)

[Глава 2. Исследовательская часть. 10](#_Toc506275250)

[Заключение 19](#_Toc506275251)

# Введение

Слово индукция по-русски означает наведение, а индуктивными называют выводы, на основе наблюдений, опытов.

Например, мы каждый день наблюдаем, что Солнце восходит с востока. Поэтому можно быть уверенным, что и завтра оно появится на востоке, а не на западе. Этот вывод мы делаем, не прибегая ни к каким предположениям о причине движения Солнца по небу (более того, само это движение оказывается кажущимся, поскольку на самом деле движется земной шар). И, тем не менее, этот индуктивный вывод правильно описывает те наблюдения, которые мы проведём завтра.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те предположения, из которых потом логическим путём делаются дальнейшие умозаключения. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений.[4]

Автор хорошо учится и с лёгкостью усваивает материал по математике. Совсем недавно он задумался «Существуют ли методы, с помощью которых выполнять задания будет легче?» Решению этого вопроса автор посвятил свою исследовательскую работу. Актуальность проводимого исследования обусловлена тем, что данная тема касается не только учеников школ, но и учащихся средних и высших учебных заведений.

В школьной программе метод математической индукции считается не важным для изучения и упускается. В то время как подробное знакомство с этим методом полезно учащимся не только из-за расширения их кругозора, но также и потому, что это может помочь глубже осознать метод обычных разделов школьного курса.

 В данной работе представлен принцип математической индукции, а также его широкое применение в решении задач, доказательстве тождеств, решении неравенств и решении вопроса делимости в курсе школьной программы за 7 и 8 класс.

**Цель работы:** изучение метода математической индукции, возможность его применение в школьной программе.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

* + 1. Осуществить теоретико-аналитический обзор научной литературы по теме.
		2. Применить метод математической индукции в решении задач на делимость, неравенств, суммированию рядов в курсе школьной программы за 8 класс.
		3. Вывести общую схему.
		4. Провести эксперимент по эффективности применения метода математической индукции.
		5. Провести социальный опрос.
		6. Сделать выводы.

**Гипотеза:** решать задачи школьного уровня легче при помощи метода математической индукции.

**Объект исследования:** метод математической индукции и его применение в школьной программе.

**Предмет исследования:** метод математической индукции.

**Методы исследования:** изучение и анализ научной литературы, опыты, наблюдение, эксперимент, анкетирование.

**Исследовательская работа** состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы. Во введении выявлена актуальность метода математической индукции, поставлена цель и задачи к работе. В первой главе раскрывается вопрос о необходимости использования метода математической индукции, его применение при вычислении, доказательстве и построении. Во второй главе говорится о применении его при доказательстве тождеств, в арифметике, при решении тригонометрических и алгебраических задач, задач на доказательство неравенств, и то, как метод математической индукции используется при обосновании теорем элементарной алгебры. В заключении сделаны выводы.

# Глава 1. Математическая индукция

## 1.1 История создания

Слово индукция происходит от латинского слова «inductio», имеющего значение - наведение, «влечь за собой» - который считается видом обобщения, связанным с предвосхищением (наведением, прогнозированием) будущих результатов, сформулированном на основе некоторой череде предыдущих опытов. Индукция в науке - есть метод познания, когда закономерности, обнаруженные в результате ограниченного числа опытов, выставляются как общие для всех аналогичных случаев.[15]

Особое место в зарождении понятии индукции занимает Аристотель и его теория познания, тесно связанная с логикой. Хотя отдельные случаи применения встречаются ещё в у Прокла и Эвклида. В своих трактатах Аристотель обстоятельно исследовал терминологию логики, подробно разобрал теорию умозаключений и доказательств, описал ряд логических операций, сформулировал основные законы мышления, в том числе законы противоречия и исключения третьего. Вклад Аристотеля в логику весьма велик, недаром другое её название - Аристотелева логика. Ещё сам Аристотель заметил, что между созданной им наукой и математикой (тогда она именовалась арифметикой) много общего. Он пытался соединить две эти науки, а именно свести размышление, или, вернее, умозаключение, к вычислению на основании исходных положений. В одном из своих трактатов Аристотель вплотную приблизился к одному из разделов математической логики - теории доказательств. Аристотель различает умозаключения, в которых вывод осуществляется от общего к частному и в которых вывод осуществляется от единичного и частного к общему. Сопоставляя дедукцию и индукцию, Аристотель говорил, что дедукция отличается большей строгостью и является «первой по природе», более соответствующей объективному порядку вещей и их зависимости, индукция же ближе нам, менее строга и более ясна и наглядна.[13]

Отличие индуктивного умозаключения от «силлогизма через средний термин» Аристотель видит в следующем: индукция показывает отношение большего термина к среднему через меньший, а силлогизм – отношение большего термина к меньшему через средний. Иными словами, в индуктивном умозаключении доказывается присущность большего термина среднему через меньший: среднему термину присущ в качестве предиката больший термин на основании того, что последний присущ всем или некоторым предметам, составляющим объем среднего термина. В том случае, если больший термин присущ всем предметам, входящим в объем среднего термина, общеутвердительное заключение будет вполне достоверным и то получится тот вид индукции, который позже получил название полной.

По своей логической структуре полная индукция представляет собой умозаключение по третьей фигуре категорического силлогизма (по модусу Darapti), но с той особенностью, что здесь тот из терминов, который служит предикатом меньшей посылки, по объёму совпадает с субъектом этой посылки, которая заключает в себе все единичные вещи или виды, входящие в понятие этого предиката, вследствие чего меньшая посылка обратима без ограничения; отсюда получается силлогизм первой фигуры (по модусу Barbara) с необходимым общеутвердительным заключением. Аристотель приводит следующий пример:

Мы имеем две посылки: 1) «Все люди, лошади, мулы и т. д. долговечны» и 2) «Все люди, лошади, мулы и т. д. не имеют желчи». В том случае, когда меньшая посылка обратима без ограничения, т. е. когда виды, перечисленные в субъекте этой посылки, охватывают всех живых существ, не имеющих желчи, мы посредством обращения меньшей посылки получим такое общеутвердительное суждение, которое в соединении с первой имеющейся посылкой даст первый модус первой фигуры силлогизма (Barbara). Следовательно, мы будем иметь полноценный достоверный вывод (умозаключение).[9]

Впервые в четком изложении метод математической индукции был применен в 17 веке выдающимся французским учёным Блезом Паскалем. И только в 18 веке сложился стандарт требований к логической строгости, остающейся и до настоящего времени господствующими в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий.

Индукция (induction – по-латыни наведение) наглядно иллюстрируется известной легендой о том, как Исаак Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения после того, как ему на голову упало яблоко. Ещё пример из физики: в таком явлении, как электромагнитная индукция, электрическое поле создаёт, «наводит» магнитное поле. «Ньютоново яблоко» – типичный пример ситуации, когда один или несколько частных случаев, то есть наблюдения, «наводят» на общее утверждение, общий вывод делается на основании частных случаев. Индуктивный метод является основным для получения общих закономерностей и в естественных, и в гуманитарных науках. Но он имеет весьма существенный недостаток: на основании частных примеров может быть сделан неверный вывод.[4]

Современная математическая логика дала на этот вопрос, определённый ответ: никакая единая логическая теория не может исчерпать разнообразия проблем теории чисел.

Таким образом, было обнаружено, что понятие математической теории в смысле теории, охватываемой единой системой аксиом теоретико-множественного типа, существенно шире, чем логическое понятие дедуктивной теории.

Относящиеся к этому вопросу результаты современной математической логики позволяют с полной конкретностью проследить диалектический процесс создания дедуктивных теорий и алгоритмов, которые доставляют нам формально-логические и вычислительные средства для решения все более широкого круга проблем математической теории. Современное название метода было введено де Морганом в 1838 году.[11]

1.2 Метод математической индукции

Одним из самых важных методов математических доказательств по праву является **метод математической индукции**. Подавляющее большинство формул, относящихся ко всем натуральным числам n, могут быть доказаны методом математической индукции (к примеру, формула суммы n первых членов арифметической прогрессии$S\_{n}=\frac{2a\_{1}+\left(n-1\right)d}{2}\*n$ формула бинома Ньютона$(a+b)^{n}=C\_{n}^{0}\*a^{n}+C\_{n}^{1}\*a^{n-1}\*b+...+C\_{n}^{n-1}\*a\*b^{n-1}+C\_{n}^{n}\*b^{n}$ и т.п.).[8]

Доказательство справедливости утверждений, зависящих от натурального числа *n*, обычно проводят с помощью **принципа полной индукции:**

**Свойство, зависящее от натурального числа n, во-первых, верно при n=1 и, во-вторых, из предположения, что оно верно для n=k, следует, что оно верно при n=k+1, то считают, что это свойство верно для любого натурального числа *n*.**

Доказательство, основанное на принципе полной индукции, называют **доказательством по индукции**, или **доказательством методом полной индукции**, или **доказательством методом математической индукции.**

В основе метода математической индукции лежит **принцип математической индукции**.

Он заключается в следующем: некоторое утверждение справедливо для всякого натурального n, если

1. оно справедливо для n = 1 и
2. из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального n = k следует его справедливость для n = k+1.

То есть, доказательство по методу математической индукции проводится в три этапа:

1. во-первых, проверятся справедливость утверждения для любого натурального числа n (обычно проверку делают для n = 1);
2. во-вторых, предполагается справедливость утверждения при любом натуральном n=k;
3. в-третьих, доказывается справедливость утверждения для числа n=k+1, отталкиваясь от предположения второго пункта.

По своему первоначальному смыслу слово “индукция” применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является полная индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах 4< n < 20 представим в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5;

14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция).

Результат, полученный неполной индукцией, остаётся, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является мощным методом открытия новых истин. В сравнении с неполной индукцией полная индукция имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев мы не в состоянии. Неполная же индукция часто приводит к ошибочным результатам.[9]

Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции. Он заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например нужно доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n 2). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для n=1. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при n=k вытекает его справедливость и при n=k+1.

Тогда утверждение считается доказанным для всех n. В самом деле, утверждение справедливо при n=1. Но тогда оно справедливо и для следующего числа n=1+1=2. Из справедливости утверждения для n=2 вытекает его справедливость для n=2+1=3. Отсюда следует справедливость утверждения для n=4 и т.д. Ясно, что, в конце концов, мы дойдём до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.[3]

**Вывод по первой главе.**

Метод математической индукции является очень древним и важным способом решений задач, суть которого заключается в применении рассуждения, при помощи которого можно получить общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Подавляющее большинство формул, относящихся ко всем натуральным числам n, могут быть доказаны методом математической индукции

# Глава 2. Исследовательская часть.

 Всю теорию, которую мы изучили в первой главе, мы используем на практике для решения школьных задач и после этого мы выясним, в каких задачах применяется метод математической индукции, и правда ли он ускоряет решение задач и увеличение количество знаний в областях математики.

Исследовательская часть состоит из 4 этапов:

1. Поиск примеров применения метода математической индукции в курсе математики.
2. Формулировка общей схемы на основе применения метода математической индукции в решении задач.
3. Экспериментальная часть:
4. Социологический опрос учеников старших классов на предмет знаний о метаматематической индукции.
5. Подбор примеров за курс математики 6-8 класса.
6. Составление авторских задач.
7. Отбор контрольной группы из учеников 7-8 классов.
8. Решение задач обычным способом.
9. Объяснение участникам контрольной группы решение задач методом математической индукции.
10. Решение подобных задач методом математической индукции.
11. Анализ полученных результатов.
12. Выводы возможности применения метода.

**1 этап. Поиск примеров.**[2]

**Метод математической индукции в решении задач на делимость.**

**Пример 1**

Доказать, что при любом n , 7 n -1 делится на 6 без остатка.

Решение:

1)Пусть n=1, тогда Х 1 =7 1 -1=6 делится на 6 без остатка. Значит при n=1 утверждение верно. 2) Предположим, что при n=k ,7 k -1 делится на 6 без остатка. 3) Докажем, что утверждение справедливо для n=k+1.

X k+1 =7 k+1 -1=7

7 k -7+6=7(7 k -1)+6.

Первое слагаемое делится на 6, поскольку 7 k -1 делится на 6 по предположению, а вторым слагаемым является 6. Значит 7 n -1 кратно 6 при любом натуральном n. В силу метода математической индукции утверждение доказано.

**Пример 2**

Доказать, что 33n+3-26n-27 при произвольном натуральном n делится на 262(676) без остатка.
Решение: Предварительно докажем, что 33n+3-1 делится на 26 без остатка.

1) При n=0 33-1=26 делится на 26

2) Предположим, что при n=k33k+3-1 делится на 26

3) Докажем, что утверждение верно при n=k+1.

33K+6-1=27,33k+3-1=26,33k+3+(33k+3-1) -делится на 26.

Теперь проведём доказательство утверждения, сформулированного в условии задачи.
1) Очевидно, что при n=1 утверждение верно 33+3-26-27=676

2) Предположим, что при n=k выражение 33k+3-26k-27 делится на 262 без остатка.

3)Докажем, что утверждение верно при n=k+133k+6-26(k+1)-27=26(33k+3-1)+(33k+3-26k-27)

Оба слагаемых делятся на 262; первое делится на 262, потому что мы доказали делимость на 26 выражения, стоящего в скобках, а второе делится по предположению индукции. В силу метода математической индукции утверждение доказано

**Применение метода математической индукции к суммированию рядов.**

**Пример 3**

Доказать, что

1+х+х2+х 3 +…+х n = (х n+1 -1)/(х-1), где х (1)

Решение:

1) При n=1 получаем

1+х=(х 2 -1)/(х-1)=(х-1)(х+1)/(х-1)=х+1

следовательно, при n=1 формула верна; А(1) истинно.

2) Пусть k-любое натуральное число и пусть формула верна при n=k, т.е.

1+х+х 2 +х 3 +…+х k =(х k+1 -1)/(х-1).

Докажем, что тогда выполняется равенство

1+х+х 2 +х 3 +…+х k +x k+1 =(x k+2 -1)/(х-1).

В самом деле

1+х+х2 +x 3 +…+х k +x k+1 = (1+x+x 2 +x 3 +…+x k )+x k+1 =

=(xk+1 -1)/(x-1)+xk+1 =(xk+2 -1)/(x-1).

Итак, А(k) >A(k+1).

На основании принципа математической индукции заключаем, что формула верна для любого натурального числа n.

**Пример применения метода математической индукции к доказательству неравенств.**

**Пример 4**

Доказать, что при n>2 справедливо неравенство

1+(1/2 2) + (1/3 2 )+…+(1/n 2 )<1,7-(1/n).

Решение:

1) При n=3 неравенство верно

1+(1/2 2) + (1/3 2 )=245/180<246/180=1,7-(1/3).

2).Предположим, что при n=k

1+(1/2 2) + (1/3 2 )+…+(1/k 2 )=1,7-(1/k).

3) Докажем справедливость неравенства при n=k+1

(1+(1/2 2) +…+(1/k 2 )) + (1/(k+1) 2 )<1,7-(1/k)+(1/(k+1) 2 ).

Докажем, что 1,7-(1/k)+(1/(k+1) 2)<1,7-(1/k+1) U

(1/(k+1) 2 ) + (1/k+1)<1/k U (k+2)/(k+1) 2 <1/k U

k(k+2) < (k+1) 2 U k 2 +2k<k 2 +2k+1.

Последнее очевидно, а поэтому

1+(1/2 2) +(1/3 2 )+…+(1/(k+1) 2 )<1,7-(1/k+1).

В силу метода математической индукции неравенство доказано.

**Метод математической индукции в применение к другим задачам.**

Наиболее естественное применение метода математической индукции в геометрии. [7]

**Пример 5**

Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника равно n(n-3)/2.

Решение:

1) При n=3 утверждение справедливо, ибо в треугольнике

А 3 =3(3-3)/2=0 диагоналей;

А 2А(3) истинно.

2) Предположим, что во всяком

выпуклом k-угольнике имеется Аk =k(k-3)/2 диагоналей.

3)Докажем, что тогда в выпуклом

А k+1 (k+1)-угольнике число

диагоналей Аk+1 =(k+1)(k-2)/2.

Пусть А1 А 2 А 3 …A k A k+1 -выпуклый (k+1)-угольник. Проведём в нём диагональ A 1 A k . Чтобы под-считать общее число диагоналей этого (k+1)-угольника нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике A 1 A 2 …A k , прибавить к полученному числу k-2, т.е. число диагоналей (k+1)-угольника, исходящих из вершины Аk+1 , и, кроме того, следует учесть диагональ А 1 А k . Таким образом,

k+1=k+(k-2)+1=k(k-3)/2+k-1=(k+1)(k-2)/2.

Итак, А(k) >A(k+1). Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

**Примеры математической индукции в логике.**

Давайте разберём примеры и решим несколько задач, в которых мы будем применять логику.[10]

**Примеры:**

**Вежливая очередь*.*** Правила хорошего тона запрещают мужчине стоять в очереди сразу перед женщиной (он должен пропустить её вперёд). Поэтому, если первый человек в очереди - мужчина, то и все остальные - мужчины. [6]

 **Резиновый автобус.** Докажем, что в автобус помещается любое количество народу. В самом деле, один человек помещается без труда (базис индукции); с другой стороны, как бы ни был набит автобус, уж один-то человек в него всегда влезет (шаг индукции).

**Задачи:**

**Задача 1.**

Показать, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек. Решение. Покажем, как уплатить 8, 9 и 10 копеек:

8 = 5 + 3;

9 = 3 + 3 + 3;

10 = 5 + 5:

Добавив ещё одну трёхкопеечную монету, получаем

11 = 8 + 3 = (5 + 3) + 3;

12 = 9 + 3 = (3 + 3 + 3) + 3;

13 = 10 + 3 = (5 + 5) + 3:

Ещё одна трёхкопеечная монета позволит уплатить

14 = 11 + 3;

15 = 12 + 3;

16 = 13 + 3

копеек, и так далее. Задача решена.

**Задача 2.**

 Придя на встречу, некоторые из её участников пожали друг другу руки. Доказать, что число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Решение. Будем считать, что рукопожатия происходят по очереди. Изначально все участники сделали 0 рукопожатий, а нуль - чётное число. Поэтому ни одного «нечётного» участника нет, и утверждение задачи верно. (Для краткости мы называем «чётными» и «нечётными» участников, сделавших чётное и нечётное число рукопожатий.)

После первого рукопожатия оба его участника стали нечётными (они сделали по одному рукопожатию), то есть появилось два нечётных участника. Два - чётное число, и утверждение задачи остаётся верным. Дальше уже возможны варианты: во втором рукопожатии могут участвовать новые люди, а также участники первого. Мы разберём три возможных случая:

1. Два чётных участника жмут друг другу руки. После этого каждый из них становится нечётным (чётное число плюс единица - нечётное число). Общее число нечётных участников увеличивается на 2.
2. Два нечётных участника жмут друг другу руки. Оба становятся чётными, и общее число нечётных участников уменьшается на два (и остаётся чётным, раз оно было таковым).
3. Чётный участник жмёт руку нечётному. При этом они меняются местами: нечётный становится чётным и наоборот. Поэтому общее число нечётных участников не меняется.
4. Таким образом, мы видим, что интересующее нас число (количество нечётных участников) всё время остаётся чётным (вначале оно равно нулю, потом может увеличиваться и уменьшаться на 2).

Задача решена.

**2 этап. Формулировка общей схемы**

Что же такое «математическая индукция»? Что общего в решениях разобранных нами задач? В каждой из них мы выделяем в задаче последовательность утверждений, которые доказываем по очереди.

В задаче о монетах мы доказывали, что n копеек (при n > 8) можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек. Сначала мы проверили это при n = 8; 9; 10, затем заметили, что прибавлением одной трёхкопеечной монеты можно получить n = 11; 12; 13, затем n = 14; 15; 16 и так далее.

Наконец, в задаче о рукопожатиях мы доказывали, что число нечётных участников после n рукопожатий будет чётным (поскольку при переходе от n к n + 1 число рукопожатий либо не меняется, либо меняется на 2). Итак, общая схема доказательства по индукции такова. Есть некоторая последовательность утверждений (A1; A2;). Мы доказываем, что очередное утверждение ($An$) верно, считая известным, что все предыдущие утверждения (Ak при k < n) верны. Это позволяет нам утверждать, что все утверждения $An $верны. Такой способ рассуждения называется математической индукцией, а величина n называется параметром индукции. Говорят, что мы доказываем утверждение $An$ индукцией по n. Например, в задаче о рукопожатиях утверждение $An$ таково: после n рукопожатий число участников, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

**3 этап. Экспериментальная часть**

 Прежде чем приступить к экспериментальной части, автор решил провести социологический опрос на предмет выявления знаний о математической индукции.

 Как показал опрос, 98 % учеников нашей школы не знают, что такое метод математической индукции и о его использовании в школьной программе.

 Для проведения эксперимента был сделан подбор примеров за курс математики 6-8 класс. [2]

Доказать, что 33n-1+24n-3 при произвольном натуральном n делится на 11.

Решение: 1) Пусть n=1, тогда

Х1=33-1+24-3=32+21=11 делится на 11 без остатка. Значит, при n=1 утверждение верно.

2) Предположим, что при n=k

Xk=33k-1+24k-3 делится на 11 без остатка.

3) Докажем, что утверждение верно для n=k+1.

Xk+1=33(k+1)-1+24(k+1)-3=33k+2+24k+1=33´ 33k-1+24´ 24k-3=

=27´ 33k-1+16´ 24k-3 =(16+11)´ 33k-1+16´ 24k-3=16´ 33k-1+

+11´ 33k-1+16´ 24k-3=16(33k-1+24k-3) + 11´ 33k-1.

Первое слагаемое делится на 11 без остатка, поскольку 33k-1+24k-3 делится на 11 по предположению, второе делится на 11, потому что одним из его множителей есть число 11. Значит и сумма делится на 11 без остатка при любом натуральном n. В силу метода математической индукции утверждение доказано.
**Составление авторских задач**

Задачи, созданные автором для проведения опыта.

Автором является ученик 8 класса 34 школы Романов Егор.

Тема 7 класса - степени.

Доказать закономерность.

Решение обычным способом.

1=12,

1 + 3 =4:2=22 ,

1 + 3 + 5=9:3= З2,

1 + 3 + 5 + 7=16:4=42.

Решение математической индукцией.

1 =12,

1 + 3 = 22,

1 + 3 + 5 = З2,

1 + 3 + 5 + 7 = 42.

Тема 6 класса – кратные.

Доказать, что для каждого натурального n кратно 7.

Решение обычным способом.

$2^{7}$=2\*2\*2\*2\*2\*2\*2=(128-2):7=18
$3^{7}$=3\*3\*3\*3\*3\*3\*3=(2187-3):7=312

$4^{7}$=4\*4\*4\*4\*4\*4\*4=(16384-4):7=2340

Решение математической индукцией

$$(n^{7}-n) делится на семь$$

Возьмём n=2

Значит $\left(2^{7}-2\right):$7

$$2^{7}=128$$

(128-2):7=18

Возьмём n=3

Значит $\left(3^{7}-3\right):$7

$$3^{7}=2187$$

(2187-3):7=312

Смотря на 2 эти решения, мы можем сделать вывод, что для каждого натурального n кратно 7.

Для проведения эксперимента была отобрана контрольная группа из 8 учеников 8-9 классов. Сначала группа решала задачи обычным способом и затем, после объяснения автора - методом математической индукции. [9]

С целью подтверждения своей гипотезы, что математическая индукция упрощает решение задач школьной программы, автор ознакомил участников эксперимента с методом математической индукции, сравнил результаты решения задач до объяснения и после. (Таблица 1)

Таблица 1. Результаты эксперимента

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Список учеников: | Время решения задач обычным способом | Время решения задач математической индукцией |
| Ученик 1 | 6 мин 17 сек. | 4 мин. 39 сек. |
| Ученик 2 | 7 мин 22 сек. | 5 мин. 51 сек. |
| Ученик 3 | 6 мин 59 сек. | 6 мин. 36 сек. |
| Ученик 4 | 4 мин 42 сек. | 4 мин. 41 сек. |
| Ученик 5 | 4 мин 59 сек. | 4 мин. 15 сек. |
| Ученик 6 | 6 мин 30 сек. | 5 мин. 33 сек. |
| Ученик 7 | 5 мин 16 сек. | 4 мин. 58 сек. |
| Ученик 8 | 7 мин 57 сек. | 9 мин. 5 сек. |
| Среднее время | 6 мин 30 сек. | 5 мин 42 сек. |

Как показал наш эксперимент с помощью математической индукции можно решать задачи быстрее, чем обычным способом, что подтвердили 7 из 8 участников. Все в среднем улучшили результаты на 48 секунды. Как мы видим, ухудшил время ученик 8.

 После анализа таблицы автор пришёл к выводу, что решение задач при помощи математической индукции ускоряет процесс, значит, гипотеза подтвердилась.

По истечении эксперимента автор в ходе беседы выявил, что и ученики, и учитель отметили, решать задачи школьного курса гораздо легче. А также, данный способ им позволил применять новый метод на фоне порядком надоевшего обычного способа. Это нестандартное решение позволило по-новому взглянуть на возможности математики и разнообразие способов решения одних и тех же задач.

**Вывод по второй главе:**

Большинство учеников нашей школы не знают что такое метод математической индукции, а он может применяться в решении задач на делимость, неравенств, суммированию рядов в курсе школьной программы и как показал эксперимент очень удачно, ведь 7 из 8 учеников ускорили время решения задач. Ученик 1 является отличником и с помощью метода математической индукции он улучшил своё время на 98 секунд, что доказывает о полезности изучения метода в школьной программе.

# Заключение

Метод математической индукции начал зарождаться очень давно ещё во времена Аристотеля, но впервые в чётком изложении метод математической индукции был применён в 17 веке выдающимся французским учёным Блезом Паскалем. И только в 18 веке сложился стандарт требований к логической строгости, остающейся и до настоящего времени господствующими в практической работе математиков над развитием отдельных математических теорий, а современное название метода было введено де Морганом в 1838 году.

Сам по себе метод математической индукции подавляет большинство формул, и помогает в решении задач школьного уровня на делимость, неравенств, суммированию рядов в курсе школьной программы, суть которого заключается в применении рассуждения, при помощи которого можно получить общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений.

При проведении эксперимента контрольной группе понравился метод математической индукции, и большинство из контрольной группы ускорили время решения задач школьного курса, что доказывает о его полезности и подтверждает нашу гипотезу о том, что решать задачи школьного уровня легче методом математической индукции.

Практическое значение.

Метод математической индукции положительно влияет на результаты учеников. Поэтому его можно применять в некоторых темах в школьном курсе математики для развития логического мышления.

Также автор советует использовать этот метод в образовательных учреждениях, что ускорит время решения задач, повысит уровень успеваемости и в целом позитивно скажется на отношение учащихся к школьному предмету.

# Список литературы

1. Боковнев О. А., Фирсов В. В., Шварцбурд С. И. Избранные вопросы математики. 9 класс. Факультативный курс. - М.: Просвещение, 1979г.
2. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике / Вавилов В.В.
3. Ви­лен­кин Н.Я., Сур­ви­ло Г.С. Ал­геб­ра 9 кл. С углуб­лен­ным изу­че­ни­ем ма­те­ма­ти­ки. – М.: Про­све­ще­ние, 2006.
4. Ви­лен­кин Н.Я.,. Индукция. Комбинаторика. — Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1976. — 48 с.
5. Винберг Э.Б., Курс алгебры, 2-е изд., стер., МЦНМО, М., 2013, 590 с.
6. Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: методические рекомендации, дидактические материалы.
7. Головина Л.И,. И. М. Яглом. Индукция в геометрии. — Физматгиз, 1961. — Т. 21. — 100 с. — (Популярные лекции по математике).
8. Ма­ка­ры­чев Ю.Н., Мин­дюк Н.Г., Неш­ков, К.И. Ал­геб­ра для 9 клас­са с углублённым изучением ма­те­ма­ти­ки. – М.: Мне­мо­зи­на, 2003.
9. Ма­ка­ры­чев Ю.Н., Мин­дюк Н.Г До­пол­ни­тель­ные главы к школь­но­му учеб­ни­ку ал­геб­ры 9 клас­са. – М.: Про­све­ще­ние, 2002.
10. Маковельский А.О. История логики Индукция
11. Г. Роббинс, Р. Курант. Глава I, § 2, // Что такое математика?
12. Рубанов И.С. Как обучать методу математической индукции.
13. Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. «О математической индукции» /Учебное пособие. - М.: Изд-во "Наука", 1967. -144 стр.
14. Соминский И. С. Метод математической индукции. — Наука, 1965. — Т. 3. — 58 с. — (Популярные лекции по математике).
15. Шень.А. Математическая индукция. — МЦНМО, 2004. — 36 с.